جامعة البعث          معادلات تفاضلية /2/          اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات الفصل الأول 2017-2018

---

**السؤال الأول : ( 15 درجة )**

أوجد الحل العام للمعادلة $(e^x-1)y''+2e^x y'+e^x y=0$

بعد أن تثبت أنها تامة .

$\frac{C_1 x}{e^x-1} + \frac{C_2}{e^x-1}$

**السؤال الثاني : (35درجة )**

لتكن لدينا المعادلة

$$(\cos 2x-2\sin 2x)y''+5\cos 2x \quad y'+(4\cos 2x+2\sin 2x)y=e^{-x}(\cos 2x-2\sin 2x)^2$$

المطلوب : 1"- أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة .

2"- أوجد الحل العام للمعادلة

**السؤال الثالث : (12درجة )**

اعتمادا" على خواص المؤثر المؤثر التفاضلي أوجد وبطريقتين مختلفتين

ناتج مايلي $(D^2+2D+1)\ x^2e^{-x}$

**السؤال الرابع : (38درجة)**

لتكن لدينا المعادلة $y^{(4)}-y'''-9y''-11y'-4y=e^{4x}+e^{-x}$

المطلوب : 1"- أوجد $y_h$ اذا علمت أن $y_1=e^{4x}$ حل خاص للمتجانسة المناظرة .

2"- اقترح حلا" خاصا" بطريقة المعاملات غير المعينة دون تعينها .

3"- أوجد حلا" خاصا" بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي . ماهو الحل العام .

*******************************

مدرس المقرر : د. رامز الشيخ فتوح

قسم الرياضيات

معادلات تفاضلية (2)

جواب السؤال الأول: 15 درجة

المعادلة هي

$$(e^x-1)y''+2e^x y'+e^x y=0$$

منضبطة

$$P_2=e^x-1 \qquad P_1=2e^x \qquad P_0=e^x$$

تكون المعادلة تامة إذا ونتحقق الشرط

$$P_2''-P_1'+P_0=0$$

7

$$P_2''-P_1'+P_0=e^x-2e^x+e^x=0$$

إذن المعادلة تامة والمعادلة

$$B_1y'+B_0y=c_1$$

تكون تكاملها الأول هي

$$B_1=P_2 \qquad B_0=P_1-P_2'=2e^x-e^x=e^x$$

إذن المعادلة

$$(e^x-1)y'+e^x y=c_1 \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x-1)y=c_1$$

8

بالمكاملة نجد أن

$$(e^x-1)y=c_1x+c_2$$

ومنه يكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y=\frac{c_1x}{e^x-1}+\frac{c_2}{e^x-1}$$

* * * * * * * *

• طريقة ثانية

| | $(e^x-1)y''+2e^xy'+e^xy$ |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}(e^x-1)y'$ | $(e^x-1)y''+e^xy'$ |
| | − |
| $\frac{d}{dx}e^xy$ | $0 \quad e^xy'+e^xy$ |
| | $e^xy'+e^xy$ |
| | − |
| | $0 \quad 0$ |

7

إذن المعادلة تامة والمعادلة

$$(e^x-1)y'+e^xy=c_1$$

تكون تكاملها الأول هي والمعادلة تكتب بالشكل

$$\frac{d}{dx}(e^x-1)y=c_1$$

8

بالمكاملة نجد أن

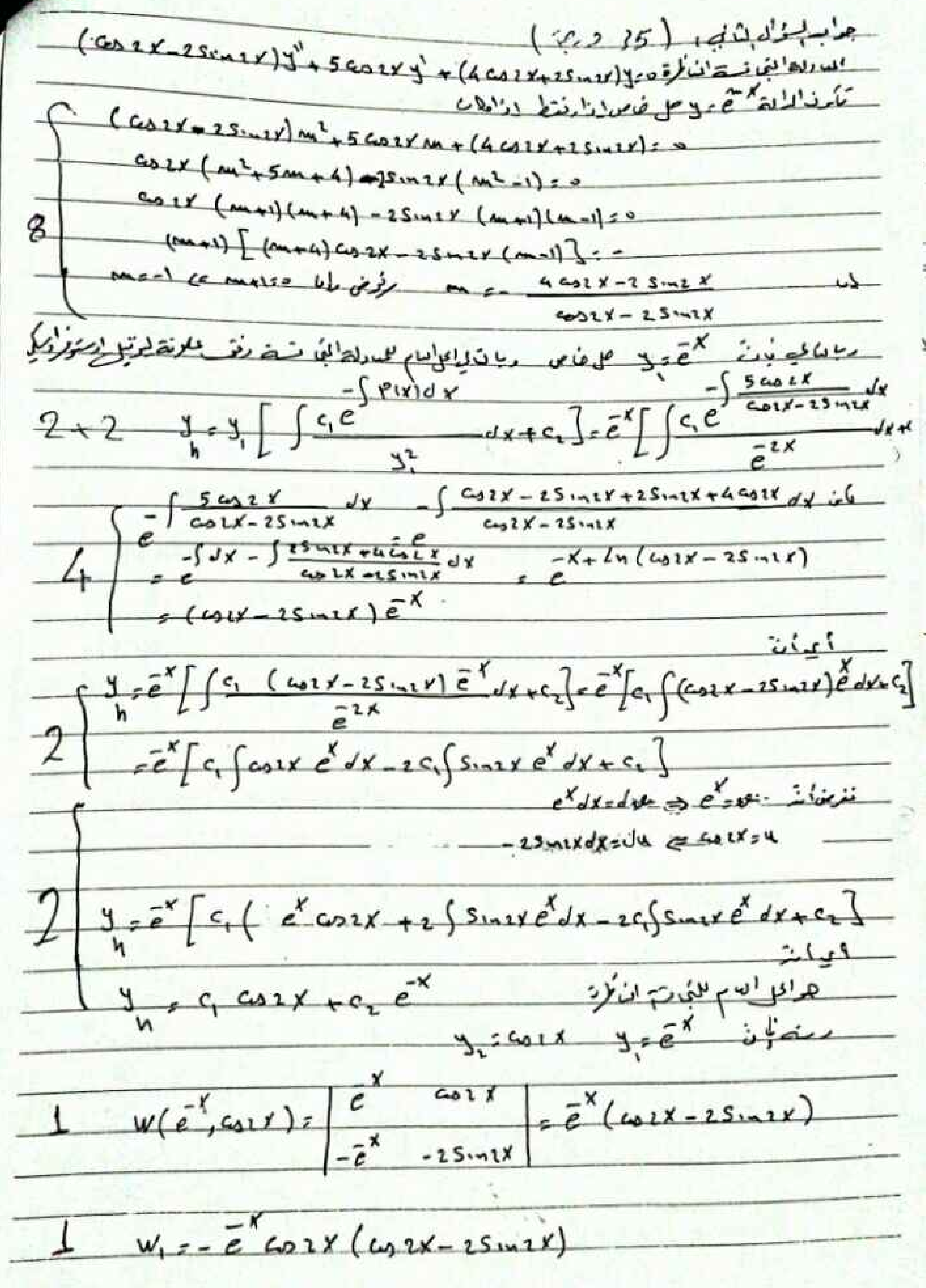
$$(e^x-1)y=c_1x+c_2$$

ومنه

$$y=\frac{c_1x}{e^x-1}+\frac{c_2}{e^x-1}$$

هو الحل العام المطلوب

* * * * * * *



جواب السؤال الثاني ( 35 درجة )

المعادلة المتجانسة الآتية $(\cos 2x - 2\sin 2x)y'' + 5\cos 2x\, y' + (4\cos 2x + 2\sin 2x)y = 0$

نأخذ الدالة $y = e^{mx}$ حل خاص إذا تحقق الآتي

8
$$(\cos 2x - 2\sin 2x)m^2 + 5\cos 2x\, m + (4\cos 2x + 2\sin 2x) = 0$$
$$\cos 2x\,(m^2 + 5m + 4) - 2\sin 2x\,(m^2 - 1) = 0$$
$$\cos 2x\,(m+1)(m+4) - 2\sin 2x\,(m+1)(m-1) = 0$$
$$(m+1)\left[(m+4)\cos 2x - 2\sin 2x\,(m-1)\right] = 0$$

أما $m = -\dfrac{4\cos 2x - 2\sin 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x}$ رفض لأنها $m=-1$ ، $m+1=0$

وبما أنه بين $y = e^{-x}$ حل خاص ، وبما أن الحل العام للمعادلة المتجانسة وفق علاقة لجرانج أوستروجرادسكي

2+2
$$y_h = y_1\left[\int \frac{c_1 e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx + c_2\right] = e^{-x}\left[\int \frac{c_1 e^{-\int \frac{5\cos 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x}dx}}{e^{-2x}}dx + c_2\right]$$

بما أن

4
$$e^{-\int \frac{5\cos 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x}dx} = e^{-\int \frac{\cos 2x - 2\sin 2x + 2\sin 2x + 4\cos 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x}dx}$$
$$= e^{-\int dx - \int \frac{2\sin 2x + 4\cos 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x}dx} = e^{-x + \ln(\cos 2x - 2\sin 2x)}$$
$$= (\cos 2x - 2\sin 2x)e^{-x}$$

أي أن

2
$$y_h = e^{-x}\left[\int \frac{c_1(\cos 2x - 2\sin 2x)e^{-x}}{e^{-2x}}dx + c_2\right] = e^{-x}\left[c_1\int(\cos 2x - 2\sin 2x)e^{x}dx + c_2\right]$$
$$= e^{-x}\left[c_1\int \cos 2x\, e^{x}dx - 2c_1\int \sin 2x\, e^{x}dx + c_2\right]$$

نفرض أن $e^{x} = dv \Rightarrow e^{x}dx = dv$

$\cos 2x = u \Rightarrow -2\sin 2x\, dx = du$

2
$$y_h = e^{-x}\left[c_1\left(e^{x}\cos 2x + 2\int \sin 2x\, e^{x}dx\right) - 2c_1\int \sin 2x\, e^{x}dx + c_2\right]$$

وعليه

فالحل العام للمتجانسة الآتية

$$y_h = c_1\cos 2x + c_2 e^{-x}$$

بحيث أن $y_1 = e^{-x}$ ، $y_2 = \cos 2x$

1
$$W(e^{-x}, \cos 2x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & \cos 2x \\ -e^{-x} & -2\sin 2x \end{vmatrix} = e^{-x}(\cos 2x - 2\sin 2x)$$

1
$$W_1 = -e^{-x}\cos 2x\,(\cos 2x - 2\sin 2x)$$

1 $w_2 = e^{-2x}(\cos 2x - 2\sin 2x)$

ومن ثم فإن الحل الخاص

1 $y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx$

6 $y_p = e^{-x} \int -\cos 2x \, dx + \cos 2x \int e^{-x} = -\frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x - e^{x} \cos 2x$

ومنه فإن الحل العام هو

1+5 $y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 \cos 2x - \frac{e^{-x}}{2} \sin 2x - e^{-x} \cos 2x$

جواب السؤال الثالث: | $12 = 6 + 6$ درجات

أولاً: حسب قاعدة الإزاحة الأسية (6)

2 $\phi(D) e^{mx} v(x) = e^{mx} \phi(D+m) v(x)$

4 $(D^2+2D+1) e^{-x} x^2 = (D+1)^2 e^{-x} x^2 = e^{-x} (D-1+1)^2 x^2 = e^{-x} D^2 x^2 = 2 e^{-x}$

ثانياً: حسب قاعدة تأثير مؤثر تفاضلي على حاصل ضرب دالتين إحداهما الدالة $x$ (6)

1 $\phi(D)\, x\, v(x) = x\, \phi(D)\, v(x) + \phi'(D)\, v(x)$

1 $\phi(D)\, x^2 v(x) = x^2 \phi(D)\, v(x) + 2x\, \phi'(D)\, v(x) + \phi''(D)\, v(x)$ و

ومنه فإن

4 $(D+1)^2 x^2 e^{-x} = x^2 (D+1)^2 e^{-x} + 2x\, 2(D+1) e^{-x} + 2 e^{-x}$

$= x^2 (-1+1)^2 e^{-x} + 4x(-1+1) e^{-x} + 2 e^{-x} = 2 e^{-x}$

وهو المطلوب.

جواب السؤال الرابع: | $38 = 14 + 10 + 14$

أولاً: المعادلة التي تحقق الأخيرة هي (14)

$y^{(4)} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$

المعادلة المميزة هي

$m^4 - m^3 - 9m^2 - 11m - 4 = 0$

بما أن $y = e^{4x}$ هو أحد الحلول ينتج منه جذر للمعادلة المميزة هو $m = 4$

ومن ثم فإن

$(m-4)(m^3 + 3m^2 + 3m + 1) = 0$

ومنه فإن

$(m-4)(m+1)^3 = 0$

أي أن

$m_1 = 4$ , $m_2 = m_3 = m_4 = -1$

ومن ثم فإن الحل العام للمتجانسة هو

$y_h = A_1 e^{4x} + e^{-x}(A_2 x^2 + A_3 x + A_4)$

ثانياً: (15)

الحل الخاص المقترح وفق طريقة المعاملات غير المعينة هو

$y_p = B_1 e^{4x} + B_2 e^{-x}$

نلاحظ أن هناك اشتراك بين $y_p$ و $y_h$ في الحدين هما $e^{4x}$ ، $e^{-x}$

نضرب كل منهما بأقل قوة لـ $x$ تزيل الاشتراك فيكون الحل الخاص المقترح بعد التعديل هو

$y_p = B_1 x e^{4x} + B_2 x^3 e^{-x}$

1 $W_2 = e^{-2x}(\cos 2x - 2\sin 2x)$

وبالتالي فإن الحل الخاص

1 $y_p = y_1\int \frac{W_1}{W}dx + y_2\int \frac{W_2}{W}dx$

6 $y_p = e^{-x}\int -\cos 2x\,dx + \cos x\int e^{-x} = -\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x - e^{-x}\cos 2x$

ومنه فإن الحل العام هو

1+5 $y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2\cos 2x - \frac{e^{-x}}{2}\sin 2x - e^{-x}\cos 2x$

جواب السؤال الثالث: [12 = 6+6 درجات]

أولاً: من خاصية الإزاحة الأسية (6)

2 $\phi(D)e^{mx}v(x) = e^{mx}\phi(D+m)v(x)$

4 $(D^2+2D+1)e^{-x}x^2 = (D+1)^2e^{-x}x^2 = e^{-x}(D-1+1)^2x^2 = e^{-x}D^2x^2 = 2e^{-x}$

ثانياً: من قاعدة تأثير مؤثر تفاضلي على حاصل ضرب اقتران في x (6)

1 $\phi(D)\,x\,v(x) = x\,\phi(D)v(x) + \phi'(D)v(x)$

1 $\phi(D)x^2v(x) = x^2\phi(D)v(x) + 2x\phi'(D)v(x) + \phi''(D)v(x)$ ،

ومنه فإن

4 $(D+1)^2x^2e^{-x} = x^2(D+1)^2e^{-x} + 2x\,2(D+1)e^{-x} + 2e^{-x}$

$= x^2(-1+1)^2e^{-x} + 4x(-1+1)e^{-x} + 2e^{-x} = 2e^{-x}$

وهو المطلوب.

جواب السؤال الرابع: [38 = 14+10+14]

أولاً: المعادلة المتجانسة المرافقة هي $y^{(4)} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$

(14) المعادلة المميزة هي $m^4 - m^3 - 9m^2 - 11m - 4 = 0$

بما أن $y = e^{4x}$ حل فإن هذا الحل ينتج من جذر المعادلة المميزة هو $m = 4$

وبالتالي فإن $(m-4)(m^3+3m^2+3m+1) = 0$

ومنه فإن $(m-4)(m+1)^3 = 0$

أي أن $m_1 = 4$ ، $m_2 = m_3 = m_4 = -1$

وبالتالي فإن الحل العام للمتجانسة المرافقة هو $y_h = A_1e^{4x} + e^{-x}(A_2x^2 + A_3x + A_4)$

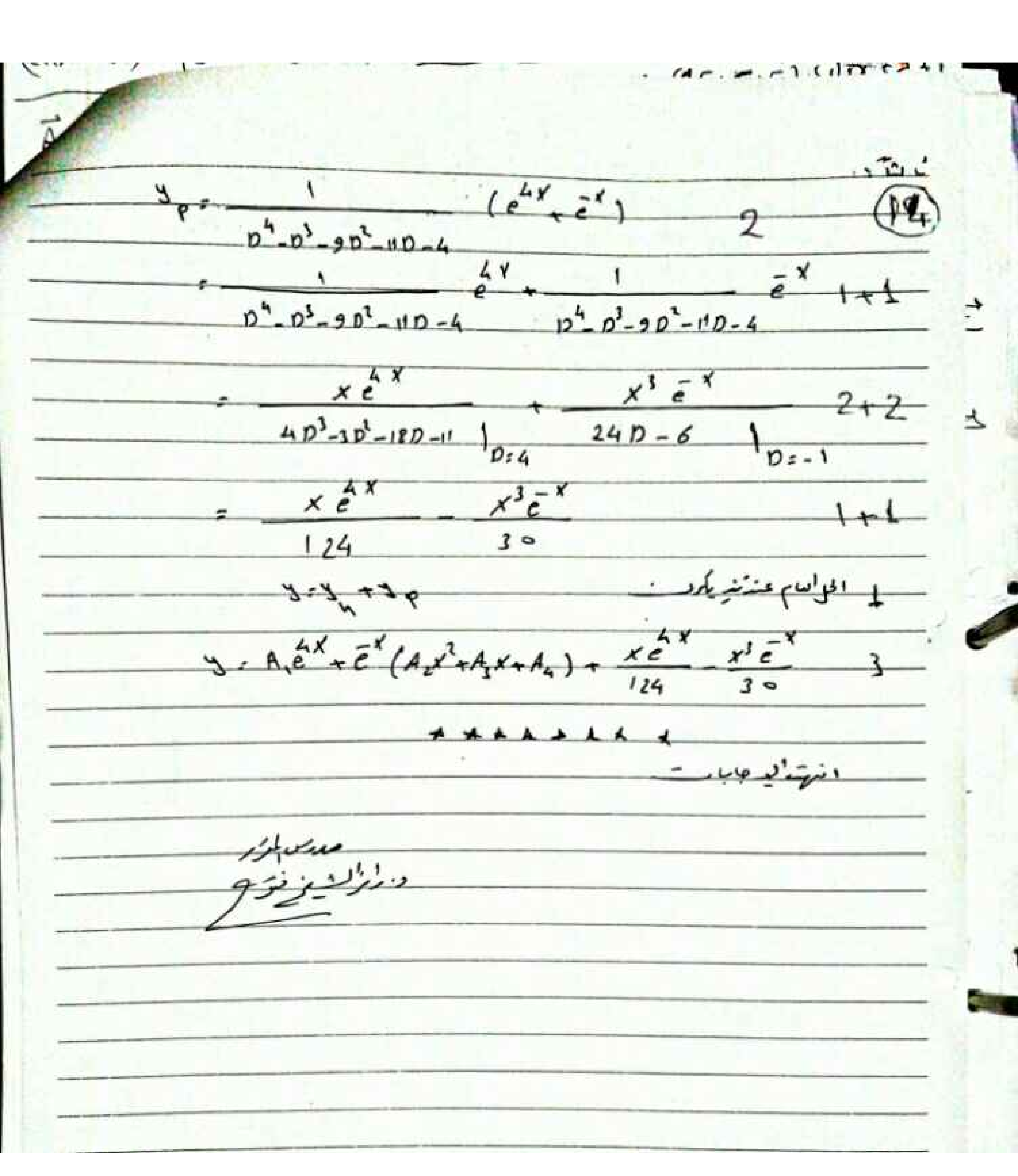
ثانياً:

(10) الحل الخاص المقترح وفق القاعدة الأساسية هو $y_p = B_1e^{4x} + B_2e^{-x}$

نلاحظ أن هناك اشتراك بين $y_p$ و $y_h$ والاشتراك في حدين هما $e^{4x}$ ، $e^{-x}$

نضرب كل حد بأقل قوة لـ x تزيل الاشتراك فيكون الحل الخاص المقترح بعد التعديل هو

$y_p = B_1xe^{4x} + B_2x^3e^{-x}$



$$y_p = \frac{1}{D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4}\left(e^{4x} + e^{-x}\right) \qquad 2$$

(14)

$$= \frac{1}{D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4} e^{4x} + \frac{1}{D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4} e^{-x} \qquad 1+1$$

$$= \frac{x e^{4x}}{4D^3 - 3D^2 - 18D - 11}\Big|_{D=4} + \frac{x^3 e^{-x}}{24D - 6}\Big|_{D=-1} \qquad 2+2$$

$$= \frac{x e^{4x}}{124} - \frac{x^3 e^{-x}}{30} \qquad 1+1$$

$$y = y_h + y_p$$

الحواسم عند نيز بكرت 1

$$y = A_1 e^{4x} + e^{-x}\left(A_2 x^2 + A_3 x + A_4\right) + \frac{x e^{4x}}{124} - \frac{x^3 e^{-x}}{30} \qquad 3$$

* * * * * * * *

انتهت الاجابات

مدرس المادة

د. ...